Ueber die Variationen

der

Bahn-Elemente eines Punktes

welcher von einem festen Centrum im widerstrebenden Mittel angezogen wird.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Hermann Hohnhorst

Kaukehmen.

Rostock.

Carl Boldt's Buchdruckerei.

1874.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553622_0168

Die Differentialgleichungen der Bewegung eines Punktes, welcher im leeren Raume von einem festen Centrum mit einer im umgekehrten Verhältniß des Quadrates der Entfernung wirkenden Kraft angezogen wird, sind:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{\mu x}{r^3} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{\mu y}{r^3} = 0 \end{cases}$$

wo μ eine Constante, x und y die rechtwinkligen Coordinaten des angezogenen Punktes und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ seine Entfernung vom festen Centrum bedeuten. Aus diesen Gleichungen ergeben sich durch Multiplication mit resp. 2dx und 2dy und Addition, sowie durch Multiplication mit resp. y und x und Subtraktion die folgenden:

$$\begin{cases} \dfrac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \dfrac{2\mu}{r} - \dfrac{\mu}{a} \\ \dfrac{xdy - ydx}{dt} = \sqrt{\mu p} \end{cases}$$

wo a und p die Integrationsconstanten sind. Durch Einführung von Polarcoordinaten verwandeln sich dieselben, indem man:

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases}$$

setzt in:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{du.^2 + r^2 d\vartheta^2}{dt^2} = \dfrac{2\mu}{r} - \dfrac{\mu}{a} \\ \dfrac{r^2\, d\vartheta}{dt} = \sqrt{\mu p} \end{cases}$$

oder:

$$(3)\quad \begin{cases} d\dfrac{du.^2 + r^2 d\vartheta^2}{dt^2} - 2\mu d_3\left(\dfrac{1}{r}\right) = 0 \\ d(r^2 d\vartheta) = 0 \end{cases}$$

Die endlichen Integrale der Gleichungen Nr. (1) sind schließlich, wie bekannt:

$$(4)\quad \begin{cases} r = a\,(1 - e\cos u) = \dfrac{p}{1 + e\cos(\vartheta - \omega)} \\ \int n\,dt + \varepsilon - \omega = u - e\sin u \\ \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(\vartheta - \omega) = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}u \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet:

r den Radiusvector des bewegten Punktes,

a die halbe große Axe,

e die numerische Exentricität,

p den halben Parameter,

ϑ den Winkel zwischen dem Radiusvector und der Abscissenaxe,

ω den Winkel zwischen der großen Axe und der Abscissenaxe,

ε die sogenannte Epoche oder die mittlere Länge des bewegten Punktes für die Zeit $t = 0$.

Die Größe u erscheint nur als Hülfsgröße zur bequemeren Berechnung;

n ist eine Constante, die mit den Größen μ und a durch die Gleichung $n = \dfrac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$ verbunden ist.

Bewegt sich nun der angezogene Punkt in einem widerstrebenden Mittel, dessen Widerstand wir proportional der Dichtigkeit ϱ und dem Quadrat der Geschwindigkeit v annehmen, so sind die Componenten des Widerstandes nach den Coordinatenaxen $\varrho\dfrac{ds\,dx}{dt^2}$ und $\varrho\dfrac{ds\,dy}{dt^2}$, wo ds das Bogenelement der Bahn des bewegten Punktes bezeichnet und wir erhalten als Differentialgleichungen der Bewegung:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{\mu x}{r^3} + \varrho\dfrac{ds\,dx}{dt^2} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{\mu y}{r^3} + \varrho\dfrac{ds\,dy}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

zu deren Integration wir die Theorie der Variation der Constanten anwenden werden.

Zunächst lassen sich diese Gleichungen in Nr. (5) ähnlich behandeln wie zuvor die Gleichungen in Nr. (1), wodurch wir, den Gleichungen in Nr. (3) entsprechend, erhalten:

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{d}\,\dfrac{\mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\,\mathrm{d}\vartheta^2}{\mathrm{dt}^2} - 2\mu\,\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{\mathrm{r}}\right) + \dfrac{2\varrho\,(\mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\mathrm{d}\vartheta^2)}{\mathrm{dt}^2} \\ \qquad\qquad \mathrm{ds} = 0 \\ \mathrm{d}\,(\mathrm{r}^2\mathrm{d}\vartheta) + \varrho\,\mathrm{r}^2\mathrm{d}\vartheta\mathrm{ds} = 0. \end{cases}$$

Differenziren wir nun die zweite und erste der Gleichungen in Nr. (4) nach den Constanten a, e, ε, ω, so erhalten wir die beiden Gleichungen $\mathrm{d}\,\varepsilon - \mathrm{d}\,\omega + \sin u\,\mathrm{de} - (1 - \mathrm{e}\cos u)\,\mathrm{du} = 0$ und $(1 - \mathrm{e}\cos u)\,\mathrm{da} - \mathrm{a}\cos u\,\mathrm{de} + \mathrm{a}\,\mathrm{e}\sin u\,\mathrm{du} = 0$, aus welchen durch Elimination von du sogleich folgt

$$(7)\quad \begin{cases} (1 - \mathrm{e}\cos u)^2\,\mathrm{da} + \mathrm{a}\,(\mathrm{e} - \cos u)\,\mathrm{de} + \mathrm{a}\,\mathrm{e}\sin u \\ \qquad\qquad (\mathrm{d}\varepsilon - \mathrm{d}\omega) = 0. \end{cases}$$

Ferner liefert die Differentiation der Gleichung:

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{p}}{1 + \mathrm{e}\cos(\vartheta - \omega)}$$

oder $\mathrm{r} + \mathrm{r}\,\mathrm{e}\cos(\vartheta - \omega) = \mathrm{a}\,(1 - \mathrm{e}^2)$

sofort:

$$(8)\quad \mathrm{r}\cos\vartheta\,\mathrm{d}\,(\mathrm{e}\cos\omega) + \mathrm{r}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\,(\mathrm{e}\sin\omega) = \mathrm{d}\,[\mathrm{a}\,(1 - \mathrm{e}^2)].$$

Stellen wir sodann das Differential der ersten Gleichung in Nr. (2):

$$\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\mathrm{d}\vartheta^2}{\mathrm{dt}^2} - 2\mu\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right) + \mu\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{a}}\right) = 0$$

zusammen mit der ersten Gleichung in Nr. (6):

$$\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\,\mathrm{d}\vartheta^2}{\mathrm{dt}^2} - 2\mu\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right) = -2\varrho\,\frac{\mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\,\mathrm{d}\vartheta^2}{\mathrm{dt}^2}\,\mathrm{ds},$$

so folgt:

$$\mu\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{a}}\right) = 2\varrho\,\frac{\mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\,\mathrm{d}\vartheta^2}{\mathrm{dt}^2}\,\mathrm{ds}$$

oder:

$$(9)\qquad \mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{a}}\right) = 2\varrho\left(\frac{2}{\mathrm{r}} - \frac{1}{\mathrm{a}}\right)\mathrm{ds}.$$

Ebenso fließt aus der Zusammenstellung des Differentials der zweiten Gleichung in Nr. (2):

$$d\,(r^2 d\vartheta) = \sqrt{\mu}\, d\,[\sqrt{a\,(1-e^2)}\, dt]$$

mit der zweiten Gleichung in Nr. (6):

$$d\,(r^2 d\vartheta) = -\varrho\, r^2 d\vartheta\, ds$$

die neue Gleichung:

$$\sqrt{\mu}\, d\,[\sqrt{a\,(1-e^2)}\, dt] = -\varrho\, r^2 d\vartheta\, ds$$

oder:

$$(10) \qquad d\,[\sqrt{a\,(1-e^2)}\, dt] = -\varrho\, ds \sqrt{a\,(1-e)^2}\, dt.$$

Die Gleichungen also, welche uns durch Elimination die Variationen der Bahnelemente liefern werden, sind:

$$(11) \quad \begin{cases} (1 - e\cos u)^2\, da + a\,(e - \cos u)\, de + a\, e \sin u\,(d\varepsilon - du) = 0 \\ r\cos\vartheta\, d\,(e\cos\omega) + r\sin\vartheta\, d\,(e\sin\omega) = d\,[a\,(1-e^2)] \\ d\left(\frac{1}{a}\right) = 2\,\varrho\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) ds \\ d\,[\sqrt{a\,(1-e^2)}\, dt] = -\varrho\, ds \sqrt{a\,(1-e^2)}\, dt. \end{cases}$$

Nehmen wir nun die Dichtigkeit des widerstrebenden Mittels umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung vom festen Centrum an und führen die Hülfsgröße u mit Hülfe der Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\vartheta - \omega) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, \operatorname{tg}\frac{1}{2}\, u$$

ein, so haben wir in Nr. (11) folgende Ausdrücke einzusetzen:

$$\cos(\vartheta - \omega) = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}$$

$$\sin(\vartheta - \omega) = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin u}{1 - e\cos u}$$

$$1 + e\cos(\vartheta - \omega) = \frac{1-e^2}{1 - e\cos u}$$

$$r = a\,(1 - e\cos u)$$

$$\varrho = \frac{m}{r^2} = \frac{m}{a^2\,(1 - e\cos u)^2}$$

$$d\vartheta = \frac{\sqrt{1 - e^2}\, du}{1 - e \cos u}$$

$$dr = a\, e \sin u\, du$$

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}\; du.$$

Hiernach ergiebt die dritte Gleichung in Nr. (11):

$$da = -\, 2m\, \frac{1 + e \cos u}{1 - e \cos u} \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{(1 - e \cos u)^2}\, du$$

oder:

$$(12) \quad \left\{ da = -\, 2m \left(\frac{1 + e \cos u}{1 - e \cos u} \right)^2 \frac{du}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}} \right.$$

Die vierte Gleichung in Nr. (11) liefert:

$$\frac{(1 - e^2)\, da - 2\, a\, e\, de}{2\, \sqrt{a(1 - e^2)}} = -\, \frac{m \sqrt{a(1 - e^2)}}{a} \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{(1 - e \cos u)^2}\, du$$

oder mit Benutzung von Nr. (12):

$$2\, a\, e\, de = -\, 2m\, (1 - e^2)\, [(1 + e \cos u)^2 - 1 + e^2 \cos^2 u] \cdot \frac{du}{(1 - e \cos u)^2 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}$$

mithin:

$$de = -\, \frac{2m\, (1 - e^2)}{a} \cdot \frac{(1 + e \cos u) \cos u}{(1 - e \cos u)^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}$$

oder:

$$(13) \quad \left\{ de = -\, \frac{2m\, (1 - e^2)}{a} \cdot \frac{1 + e \cos u}{(1 - e \cos u)^2} \cdot \frac{\cos u\, du}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}} \right.$$

Aus der zweiten Gleichung in Nr. (11) folgt:

$$-\, e \cos \vartheta \sin \omega\, d\omega + \cos \vartheta \cos \omega\, de + e \sin \vartheta \cos \omega\, d\omega + \sin \vartheta \sin \omega\, de = \frac{(1 - e^2)\, da - 2\, a\, e\, de}{r}$$

also mit Benutzung von (12)

$$e\, d\omega \sin (\vartheta - \omega) + \cos (\vartheta - \omega)\, de = -\, \frac{2m\, (1 - e^2)}{a} \cdot \frac{1 + e \cos u}{(1 - e \cos u)^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}$$

und wegen (13):

$$e\,d\omega \sin(\vartheta - \omega) = -\frac{2m(1-e^2)}{a}\,\frac{1+e\cos u}{(1-e\cos u)^2}\,\frac{du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}} \cdot \left\{1 - \frac{(\cos u - e)\cos u}{1-e\cos u}\right\}$$

daher schließlich:

$$(14)\quad e\,d\omega = -\frac{2m\sqrt{1-e^2}}{a}\,\frac{(1+e\cos u)\sin u}{(1-e\cos u)^2}\,\frac{du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}$$

Endlich fließt aus der ersten Gleichung in Nr. (11):

$$d\varepsilon = \frac{-(1-e\cos u)^2\,da - a\,(e-\cos u)\,de}{a\,e\sin u} + d\omega$$

Führt man in diese Gleichung die unter Nr. (12), (13) und (14) gefundenen Werthe von da, de, dω ein, so resultirt nach einer Reihe leicht durchführbarer Transformationen:

$$d\varepsilon = \frac{2m}{a\,e}\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}}\,\frac{\sin u(1-e^3\cos u)\,du}{(1-e\cos u)^2} - \frac{2m\sqrt{1-e^2}}{a\,e}\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}}\,\frac{\sin u\,du}{(1-e\cos u)^2}$$

oder

$$(15)\quad d\varepsilon = \frac{2m}{a\,e}\,\frac{1+e\cos u}{(1-e\cos u)^2}\,\frac{(1-e^3\cos u)\sin u\,du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}} - \frac{2m\sqrt{1-e^2}}{a\,e}\,\frac{1+e\cos u}{(1-e\cos u)^2}\,\frac{\sin u\,du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}$$

Es stellen sich somit die Variationen der Bahnelemente nach Nr. (12), (13), (14), und (15) als folgende Integrale dar:

$$\text{I.}\quad a = -2m\int_0^u \left(\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\right)^2 \frac{du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}$$

$$\text{II.}\quad e = -\frac{2m(1-e^2)}{a}\int_0^u \frac{1+e\cos u}{(1-e\cos u)^2}\,\frac{\cos u\,du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}$$

$$\text{III.}\quad e\,.\,\omega = -\frac{2m(1-e^2)}{a}\int_0^u \frac{1+e\cos u}{(1-e\cos u)^2}\,\frac{\sin u\,du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}$$

$$\text{IV.}\quad \varepsilon = \frac{2m}{ae}\int_0^u \frac{1+e\cos u}{(1-e\cos u)^2}\,\frac{(1-e^3\cos u)\sin u\,du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}} - \frac{2m\sqrt{1-e^2}}{ae}\int_0^u \frac{1+e\cos u}{(1-e\cos u)^2}\,\frac{\sin u\,du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}$$

welche wir in Nachstehendem zu behandeln haben.

Zur Reduction des I. Integrales

$$\text{I.}\quad a = -2m \int_0^u \left\{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\right\}^2 \frac{du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}$$

setzen wir, indem wir uns der Bezeichnungen und Formeln bedienen, welche Prof. Schellbach in seinem Werke „Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen. Berlin 1864." eingeführt und entwickelt hat,

$$(16)\quad h\,x^2 = \frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}$$

und

$$(17)\quad e = \frac{1-k'}{1+k'};$$

dann ist:

$$k' = \frac{1-e}{1+e} = \frac{1}{ho^2}$$

$$k = \sqrt{1-k'} = \frac{2\sqrt{e}}{1+e} = \frac{go^2}{ho^2}$$

$$\frac{2\sqrt{e}}{1-e} = go^2$$

und die beiden anderen Thetaquotienten gx und fx lassen sich nach den Fundamentalformeln jener Lehre:

$$\begin{cases} fx^2 + k'\,gx^2 = k \\ k\,fx^2 + k'\,hx^2 = 1 \\ hx^2 - k\,gx^2 = k' \end{cases}$$

in der Form

$$gx^2 = \sqrt{e}\,\frac{1+\cos u}{1-e\cos u}$$

$$fx^2 = \sqrt{e}\,\frac{1-\cos u}{1-e\cos u}$$

darstellen. Für unser Integral erhalten wir nun aus obigen Substitutionen in Nr. (16) und (17) folgende Werthe:

$$e\cos u = \frac{hx^2-1}{hx^2+1}$$

$$1+e\cos u = \frac{2\,.\,hx^2}{hx^2+1}$$

$$1-e\cos u = \frac{2}{hx^2+1}$$

$$\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} = \frac{2 \cdot hx}{hx^2 + 1}$$

$$\cos u = \frac{1 + k'}{1 - k'} \cdot \frac{hx^2 - 1}{hx^2 + 1}$$

$$\sin u = \frac{2k}{1 - k'} \cdot \frac{fx\, gx}{hx^2 + 1}$$

$$du = \frac{2\,(1 + k')\vartheta_2 o^2}{k} \cdot \frac{hx\, dx}{hx^2 + 1}$$

wobei zu beachten ist, daß:

$$h'x = -\vartheta_2 o^2\, fx\, gx.$$

Führen wir diese Ausdrücke in das obige Integral ein, so verwandelt sich dasselbe in:

$$(18) \quad a = -2m \frac{(1 + k')\,\vartheta_2 o^2}{k} \int_o^x hx^4\, dx$$

Um den Werth dieses Integrales $\int hx^4\, dx$ zu erhalten, bilden wir das Differential des Produktes $fx \cdot gx \cdot hx$; beachten wir dabei außer den oben bereits genannten Fundamentalformeln noch, daß

$$f'x = \vartheta o^2\, gx\, hx$$

$$g'x = -\vartheta_3 o^2\, fx\, hx$$

ist, so ergiebt sich nach einer Reihe von Transformationen

$$d(fx\, gx\, hx) = \frac{\vartheta_3 o^2}{k} \left[3k' hx^4 - 2\,(1 + k'^2)\, hx^2 + k'\right] dx$$

mithin:

$$fx\, gx\, hx = \frac{3k'\,\vartheta_3 o^2}{k} \int hx^4 dx - \frac{2(1 + k'^2)\,\vartheta_3 o^2}{k} \int hx^2\, dx + \frac{k'\,\vartheta_3 o^2}{k} \cdot x$$

folglich:

$$\frac{3k'\vartheta_3 o^2}{k} \int hx^4 dx = fx\, gx\, hx - \frac{k'\vartheta_3 o^2}{k}\, x + \frac{2\,(1 + k'^2)\,\vartheta_3 o^2}{k} \int hx^2 dx$$

oder:

$$(19) \quad \int hx^4 dx = \frac{k}{3} \frac{fx\, gx\, hx}{\vartheta o^2} - \frac{1}{3} x + \frac{2}{3} \frac{1 + k'^2}{k'} \int hx^2 dx.$$

Hiernach wird der Ausdruck (18):

$$a = -2m \frac{(1+k')\,\vartheta_2 o^2}{k} \left\{ \frac{k}{3} \frac{fx\,gx\,hx}{\vartheta o^2} - \frac{1}{3}\, x + \frac{2}{3} \frac{1+k'^2}{k'} \int_o^x hx^2 dx \right\}$$

oder, da:

$$\frac{\vartheta_2 o^2}{\vartheta o^2} = \frac{k}{k'}$$

$$\frac{\vartheta_2 o^2}{\vartheta_3 o^2} = k$$

ist,

$$a = -\frac{2}{3}\, m \cdot \frac{1+k'}{k} \left\{ \frac{k^2}{k'} fx\,gx\,hx - k\,\vartheta_3 o^2\, x + \frac{2\,(1+k'^2)\,k}{k'^2}\,\vartheta o^2 \int_o^x hx^2 dx \right\}$$

$$a = -\frac{2}{3}\, m \frac{1+k'}{k'^2} \left\{ kk'\, fx\,gx\,hx - k'^2 \vartheta_3 o^2\, x + 2\,(1+k'^2)\,\vartheta o^2 \textstyle\int_o^x hx^2 dx \right\}$$

woraus sich schließlich unter Beachtung, daß

$$fx = \sqrt{k}\,\sin\varrho$$

$$gx = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\cos\varrho$$

$$hx = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\triangle\,\varrho$$

$$x\,\vartheta_3 o^2 = \int_o^\varrho \frac{d\varrho}{\triangle\,\varrho} = F(\varrho)$$

$$\vartheta o^2 \textstyle\int_o^x hx^2 dx = \int_o^\varrho \triangle\,\varrho\, d\varrho = E(\varrho)$$

ist, ergiebt

$$a = -\frac{2}{3} \frac{m\,(1+k')}{k'^2} \left\{ k^2 \sin\varrho\,\cos\varrho\,\triangle\,\varrho - k'^2\,F(\varrho) + 2\,(1-k'^2)\,E(\varrho) \right\}$$

Dieselben Substitutionen (16) und (17), welche wir soeben benutzt haben, führen auch bei dem II. Integral

$$\text{II. } e = -\frac{2m(1-e^2)}{a}\int_0^u \frac{1+e\cos u}{(1-e\cos u)^2}\,\frac{\cos u\,du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}$$

zum Ziele. Substituiren wir daher in dieses Integral

$$\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u} = hx^2$$

$$e = \frac{1-k'}{1+k'}$$

sowie die sich daraus entwickelnden, bereits oben angegebenen Ausdrücke, so erhalten wir nach leichten Veränderungen

$$(20)\qquad e = -\frac{m}{a}\,\frac{4k'\vartheta_2 0^2}{k(1-k)}\int_0^x hx^2\,(hx^2-1)\,dx.$$

Nun ist

$$\int hx^2\,(hx^2-1)\,dx = \int hx^4\,dx - \int hx^2 dx,$$

also nach Nr. (19)

$$= \frac{k}{3}\,\frac{fx\,gx\,hx}{\vartheta 0^2} - \frac{1}{3}\,x + \frac{2}{3}\,\frac{1+k'^2}{k'}\int hx^2\,dx - \int hx^2\,dx$$

oder, wenn wir die beiden letzten Glieder zusammenziehen,

$$= \frac{k}{3}\,\frac{fx\,gx\,hx}{\vartheta 0^2} - \frac{1}{3}\,x + \frac{2-3k'+2k'^2}{3k'}\int hx^2 dx,$$

so daß wir für e erhalten

$$e = -\frac{m}{a}\cdot\frac{4k'\vartheta_2 0^2}{3k(1-k')\,\vartheta 0^2}\left\{k\,fx\,gx\,hx - x\,\vartheta 0^2 + \frac{2-3k'+2k'^2}{k'}\,\vartheta 0^2\int hx^2 dx\right\}$$

oder mit Benutzung der bereits oben erwähnten Bezeichnungen

$$e = -\frac{m}{a}\cdot\frac{4}{3(1-k')}\left\{\frac{k^2}{k'}\sin\varrho\cos\varrho\,\triangle\varrho - k'F(\varrho) + \frac{2-3k'+2k'^2}{k'}\,E(\varrho)\right\}.$$

Wir wollen die beiden Größen a und e noch durch Thetafunctionen ausdrücken. Zu diesem Zweck gehen wir auf die Ausdrücke in (18) und (20) zurück. Dort hatten wir

$$(18)\quad a = -2m\,\frac{1+k'}{k}\,\vartheta_2 0^2 \int \mathrm{hx}^4\,dx$$

$$(20)\quad e = -\frac{m}{a}\,\frac{4k'}{k(1-k')}\,\vartheta_2 0^2 \left\{ \int \mathrm{hx}^4\,dx - \int \mathrm{hx}^2\,dx \right\}$$

so daß es unsere Aufgabe sein wird, die beiden Integrale $\int \mathrm{hx}^2\,dx$ und $\int \mathrm{hx}^4\,dx$ vermittelst Thetafunctionen darzustellen. Zu dem Ende nehmen wir unseren Ausgangspunkt von dem Additionstheorem für die Function hx. Dasselbe lautet:

$$\mathrm{ho}\ \mathrm{h}\,(x \pm y) = \frac{\mathrm{hx\,hy} \mp \mathrm{fx\,fy\,gx\,gy}}{1 - \mathrm{fx}^2\,\mathrm{fy}^2}$$

oder in anderer Form

$$\mathrm{ho}\ .\ \mathrm{h}\,(x \pm y) = \frac{1 + \mathrm{gx}^2\,\mathrm{gy}^2}{\mathrm{hx\,hy} \pm \mathrm{fx\,fy\,gx\,gy}}$$

aus der wir sofort herleiten

$$\frac{1}{\mathrm{ho\,h}\,(x+y)} = \frac{\mathrm{hx\,hy} + \mathrm{fx\,fy\,gx\,gy}}{1 + \mathrm{gx}^2\,\mathrm{gy}^2}$$

$$\frac{1}{\mathrm{ho\,h}\,(x-y)} = \frac{\mathrm{hx\,hy} - \mathrm{fx\,fy\,gx\,gy}}{1 + \mathrm{gx}^2\,\mathrm{gy}^2};$$

die Differenz der Quadrate dieser beiden Formeln liefert

$$\frac{1}{\mathrm{ho}^2}\left\{\frac{1}{\mathrm{h}\,(x+y)^2} - \frac{1}{\mathrm{h}\,(x-y)^2}\right\} = \frac{4\,\mathrm{fx\,fy\,gx\,gy\,hx\,hy}}{(1+\mathrm{gx}^2\,\mathrm{gy}^2)^2};$$

der Zähler der rechten Seite ist aber gleich $\dfrac{4\,\mathrm{gx\,g'x\,gy\,g'y}}{\vartheta_3 0^4}$

so daß wir erhalten

$$(21)\quad \vartheta 0^2\,\vartheta_3 0^2 \left\{\frac{1}{\mathrm{h}\,(x+y)^2} - \frac{1}{\mathrm{h}\,(x-y)^2}\right\} = \frac{4\,\mathrm{gx\,g'x\,gy\,g'y}}{(1+\mathrm{gx}^2\mathrm{gy}^2)^2}$$

Um den Ausdruck auf der rechten Seite noch auf eine zweite Weise darzustellen, differenziren wir die Formel

$$\vartheta_3 0^2\ \frac{\vartheta_3\,(x+y)\,\vartheta_3\,(x-y)}{\vartheta x^2\,\vartheta y^2} = 1 + \mathrm{gx}^2\,\mathrm{gy}^2$$

logarithmisch nach x. Dieses giebt

$$\mathrm{l'}\vartheta_3\,(x+y) + \mathrm{l'}\vartheta_3\,(x-y) - 2\,\mathrm{l'}\vartheta x = \frac{2\,\mathrm{gx\,g'x\,gy}^2}{1+\mathrm{gx}^2\mathrm{gy}^2}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach y erhalten wir sodann:

$$(22)\quad \mathrm{l}''\vartheta_3(x+y)-\mathrm{l}''\vartheta_3(x-y)=\frac{4\,\mathrm{g}x\,\mathrm{g}'x\,\mathrm{g}y\,\mathrm{g}'y}{(1+\mathrm{g}x^2\,\mathrm{g}y^2)^2}$$

Subtrahiren wir nun (21) und (22), so wird

$$\mathrm{l}''\vartheta_3(x+y)-\mathrm{l}''\vartheta_3(x-y)=\vartheta o^2\vartheta_3 o^2\left\{\frac{1}{\mathrm{h}(x+y)^2}-\frac{1}{\mathrm{h}(x-y)^2}\right\}$$

oder, wenn wir $x+y$ durch x und $x-y$ durch y ersetzen

$$\mathrm{l}''\vartheta_3 x-\mathrm{l}''\vartheta_3 y=\vartheta o^2\vartheta_3 o^2\left(\frac{1}{\mathrm{h}x^2}-\frac{1}{\mathrm{h}y^2}\right)$$

setzen wir hierin $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}-x$ und beachten, daß

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\vartheta x$$

$$\mathrm{h}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\mathrm{h}x}$$

ist, so wird

$$\mathrm{l}''\vartheta_3 x-\mathrm{l}''\vartheta_3 0=\vartheta o^2\,\vartheta_3 o^2\left(\mathrm{h}x^2-\frac{1}{\mathrm{h}o^2}\right)$$

$$=\vartheta o^2\,\vartheta_3 o^2\,\mathrm{h}x^2-\vartheta o^4$$

oder, weil

$$\vartheta o^4=\mathrm{l}''\vartheta_3 0-\mathrm{l}''\vartheta_2 0 \text{ ist,}$$

$$\vartheta o^2\,\vartheta_3 o^2\,\mathrm{h}x^2=\mathrm{l}''\vartheta x-\mathrm{l}''\vartheta_2 0.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit dx, so liefert uns die Integration den einen der gesuchten Werthe, nämlich:

$$(23)\quad \int \mathrm{h}x^2\,dx=\frac{1}{\vartheta o^2\vartheta_3 o^2}(\mathrm{l}'\vartheta x-x\mathrm{l}''\vartheta_2 0).$$

Um das zweite Integral $\int \mathrm{h}x^4\,dx$ durch Thetafunctionen auszudrücken, beziehen wir uns auf Formel Nr. (19). Dort war gefunden worden:

$$\int \mathrm{h}x^4\,dx=\frac{k}{3}\,\frac{\mathrm{f}x\,\mathrm{g}x\,\mathrm{h}x}{\vartheta o^2}-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\,\frac{1+k'^2}{k'}\int \mathrm{h}x^2\,dx$$

Ersetzen wir auf der rechten Seite Alles durch Thetafunctionen und benutzen Nr. (23), so wird das Integral:

$$\int hx^4\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{\vartheta_2 0^2}{\vartheta_3 0^2}\,\frac{\vartheta_1 x\,\vartheta_2 x\,\vartheta_3 x}{\vartheta 0^2\,\vartheta x^3} - \frac{1}{3}\,x$$

$$+ \frac{2}{3}\,\frac{\vartheta_3 0^2 + \vartheta 0^2}{\vartheta 0^4\,\vartheta_3 0^2}\,(l'\,\vartheta x - x l''\,\vartheta_2 0).$$

Da nun

$$2\,\vartheta x\,\vartheta_1 x\,\vartheta_2 x\,\vartheta_3 x = \vartheta 0\,\vartheta_2 0\,\vartheta_3 0\,\vartheta_1(2x)$$

ist, so erhalten wir ohne Mühe:

(24) $$\int hx^4\,dx = \frac{1}{6}\,\frac{\vartheta_2 0^2}{\vartheta 0\,\vartheta_3 0}\,\frac{\vartheta_1(2x)}{\vartheta x^4} - \frac{1}{3}\,x$$

$$+ \frac{2}{3}\,\frac{\vartheta_3 0^2 + \vartheta 0^2}{\vartheta_3 0^2\,\vartheta 0^4}\,(l'\vartheta x - x l''\vartheta_2 0).$$

Der Kürze wegen bilden wir gleich für den Ausdruck von e die Differenz von (24) und (23):

$$\int hx^4\,dx - \int hx^2\,dx = \frac{1}{6}\,\frac{\vartheta_2 0^3}{\vartheta 0\,\vartheta_3 0}\,\frac{\vartheta_1(2x)}{\vartheta x^4} - \frac{1}{3}\,x$$

$$+ \frac{1}{\vartheta 0^2\,\vartheta_3 0^2}\left[\frac{2\,(\vartheta_3 0^2 + \vartheta 0^2)}{3\,\vartheta 0^2} - 1\right].\,(l'\vartheta x - x l''\vartheta_2 0)$$

oder:

(25) $$\int hx^4\,dx - \int hx^2\,dx = \frac{1}{6}\,\frac{\vartheta_2 0^3}{\vartheta 0\,\vartheta_3 0}\,\frac{\vartheta_1(2x)}{\vartheta x^4} - \frac{1}{3}\,x$$

$$+ \frac{2\,\vartheta_3 0^2 - \vartheta 0^2}{3\,\vartheta_3 0^2\,\vartheta 0^4}\,(l'\vartheta x - x\,l''\vartheta_2 0).$$

Diese Werthe in Nr. (24) und (25) setzen wir nun in Nr. (18) und (20) ein und beachten, wie schon so häufig, daß $k = \frac{\vartheta_2 0^2}{\vartheta_3 0^2}$ und

$$k' = \frac{\vartheta 0^2}{\vartheta_3 0^2}$$

mithin

$$1 + k' = \frac{\vartheta 0^2 + \vartheta_3 0^2}{\vartheta_3 0^2}$$

und

$$1 - k' = \frac{\vartheta_3 0^2 - \vartheta 0^2}{\vartheta_3 0^2}$$

ist. Somit ergiebt sich:

$$a = -\frac{2}{3} m (\vartheta_3 0^2 + \vartheta 0^2) \left\{ \frac{1}{2} \frac{\vartheta_2 0^3}{\vartheta 0 \vartheta_3 0} \frac{\vartheta_1 (2x)}{\vartheta x^4} - x \right.$$
$$\left. + 2 \frac{\vartheta_3 0^2 + \vartheta 0^2}{\vartheta_3 0^2 \vartheta 0^4} (l' \vartheta x - x l'' \vartheta_2 0) \right\}.$$

$$e = -\frac{4}{3} \frac{m}{a} \frac{\vartheta_3 0^2 \vartheta 0^2}{\vartheta_3 0^2 - \vartheta 0^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\vartheta_2 0^3}{\vartheta 0 \vartheta_3 0} \frac{\vartheta_1 (2x)}{\vartheta x^4} - x \right.$$
$$\left. + 2 \frac{\vartheta_3 0^2 - \vartheta 0^2}{\vartheta_3 0^2 \vartheta 0^4} (l' \vartheta x - x l'' \vartheta_2 0) \right\}$$

In dem III. Integral:

$$\text{III.} \quad e \cdot \omega = \frac{2m \sqrt{1-e^2}}{a} \int_0^u \frac{1 + e \cos u}{(1 - e \cos u)^2} \frac{\sin u \, du}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}$$

setzen wir:

$$e \cos u = \cos \chi. \tag{26}$$

Dadurch wird:

$$\frac{1 + e \cos u}{1 - e \cos u} = \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} \chi \tag{27}$$

$$1 - e \cos u = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \chi$$

$$\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} = \sin \chi$$

$$\sin u \, du = \frac{1}{e} \sin \chi \, d\chi$$

und wir erhalten:

$$e \cdot \omega = -\frac{2m \sqrt{1-e^2}}{a} \int^{\chi} \frac{\operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} \chi \cdot d(\frac{1}{2} \chi)}{\sin^2 \frac{1}{2} \chi}$$

$$\chi = \arccos e$$

$$= \frac{2m \sqrt{1-e^2}}{ae} \left[\frac{1}{3} \operatorname{cotg}^3 \frac{1}{2} \chi \right]^{\chi}$$

$$\chi = \arccos e$$

$$= \frac{2}{3} \frac{m \sqrt{1-e^2}}{ae} \left\{ \operatorname{cotg}^3 \frac{1}{2} \chi - \operatorname{cotg}^3 \frac{\arccos e}{2} \right\}$$

Nach der Formel:

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

ist:

$$\operatorname{cotg}\frac{\arccos e}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

mithin:

$$a \cdot \omega = \frac{2}{3}\,\frac{m\sqrt{1-e^2}}{ae}\left\{\operatorname{cotg}^3\frac{1}{2}\chi - \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right)^3\right\}$$

oder wegen Nr. (27):

$$(28)\quad a \cdot \omega = \frac{2}{3}\cdot\frac{m\sqrt{1-e^2}}{ae}\left\{\left(\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}}\right)^3 - \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right)^3\right\}$$

In dem IV. Ausdruck:

$$\text{IV.}\quad \varepsilon = \frac{2m}{ae}\int_0^u \frac{1+e\cos u}{(1-e\cos u)^2}\cdot\frac{(1-e^3\cos u)\sin u\,du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}} - \frac{2m\sqrt{1-e^2}}{ae}\int_0^u \frac{1+e\cos u}{(1-e\cos u)^2}\,\frac{\sin u\,du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}$$

zerlegen wir das erste Integral in:

$$\frac{2m}{ae}\int_0^u \frac{1+e\cos u}{(1-e\cos u)^2}\,\frac{\sin u\,du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}} - \frac{2m\,e^2}{a}\int_0^u \frac{1+e\cos u}{(1-e\cos u)^2}\,\frac{\cos u\sin u\,du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}$$

so daß wir in dem ganzen Ausdruck für ε den ersten und letzten Theil zusammenziehen können, wodurch wir erhalten:

$$(29)\quad \varepsilon = \frac{2m\,(1-\sqrt{1-e^2})}{ae}\,M - \frac{2m\,e^2}{a}\,N$$

wenn wir zur Abkürzung die Bezeichnungen einführen

$$M = \int_0^u \frac{1+e\cos u}{(1-e\cos u)^2}\,\frac{\sin u\,du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}$$

$$N = \int_0^u \frac{1+e\cos u}{(1-e\cos u)^2}\,\frac{\cos u\sin u\,du}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}$$

Das erste dieser beiden Integrale ist soeben bei III. behandelt worden, und wir erhalten daher nach Nr. (28) sofort:

$$(30)\qquad M = -\frac{1}{3e}\left\{\left(\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}}\right)^3 - \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right)^3\right\}$$

Bei dem zweiten Integrale N wenden wir wiederum die Substitution

$$e\,.\,\cos u = \cos\chi$$

an und erhalten mit Hülfe der bereits bei (27) und hinterher entwickelten Ausdrücke:

$$N = \frac{1}{e^2}\int \frac{\cos^2\frac{1}{2}\chi\,\cos\chi\,d(\frac{1}{2}\chi)}{\sin^4\frac{1}{2}\chi}$$

$$\chi = \text{arc cos } e$$

oder, indem wir für $\cos\chi$ den halben Winkel einführen:

$$N = \frac{1}{e^2}\int \frac{\cos^2\frac{1}{2}\chi\,(\cos^2\frac{1}{2}\chi - \sin^2\frac{1}{2}\chi)}{\sin^4\frac{1}{2}\chi}\,d(\tfrac{1}{2}\chi)$$

und durch Auflösung der Klammern:

$$(31)\qquad N = \frac{1}{e^2}\int(\text{cotg}^4\tfrac{1}{2}\chi - \text{cotg}^2\tfrac{1}{2}\chi)\,d(\tfrac{1}{2}\chi).$$

Nun ist aber offenbar:

$$\int\text{cotg}^2 z = \int\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}\,dz = \int\left(\frac{1}{\sin^2 z} - 1\right)dz$$

$$(32)\qquad = -\text{cotg}z - z\,;$$

und

$$\int\text{cotg}^4 z\,dz = \int\frac{(1-\sin^2 z)^2}{\sin^4 z}\,dz = \int\frac{1-2\sin^2 z+\sin^4 z}{\sin^4 z}\,dz$$

$$= \int\frac{\cos^2 z - \sin^2 z + \sin^4 z}{\sin^4 z}\,dz$$

$$= \int\left(\frac{\cos^2 z}{\sin^4 z} - \frac{1}{\sin^2 z} + 1\right)dz$$

$$(33)\qquad = -\frac{1}{3}\,\text{cotg}^3 z + \text{cotg}\,z + z$$

wobei das Integral $\int\frac{\cos^2 z}{\sin^4 z}\,dz$ durch die Substitution cotg z = x, woraus $\frac{dz}{\sin^2 z} = -d\,x$ folgte, auf die Form $-\int x^2\,dx = -\frac{1}{3}x^3$ gebracht wurde. Deshalb wird nun mit Hülfe von Nr. (32) und (33) die Gleichung (31):

$$N = \frac{1}{e^2}\left[-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\frac{1}{2}\chi + 2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\chi + \chi\right]^{\chi}$$

$$\chi = \arccos e$$

oder wenn wir die Grenzen einsetzen

$$N = \frac{1}{e^2}\left\{-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\frac{1}{2}\chi + 2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\chi + \chi + \frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\frac{\arccos e}{2} - 2\operatorname{cotg}\frac{\arccos e}{2} - \arccos e\right\}$$

und da

$$\operatorname{cotg}\frac{\arccos e}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$N = \frac{1}{e^2}\left\{-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\frac{1}{2}\chi + 2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\chi + \chi + \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right)^3 - 2\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - \arccos e\right\}$$

und wegen (27) und (26)

$$(34)\quad N = \frac{1}{e^2}\left\{-\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}}\right)^3 + 2\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}} + \arccos(e\cos u) + \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right)^3 - 2\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - \arccos e\right\}.$$

Setzen wir nun die Werthe von M und N aus Nr. (30) und (34) in Nr. (29) ein, so ergiebt sich für ε

$$\varepsilon = -\frac{2m(1-\sqrt{1-e^2})}{3ae^2}\left\{\left(\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}}\right)^3 - \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right)^3\right\} - \frac{2m}{a}\left\{-\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}}\right)^3 + 2\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}} + \arccos(e\cos u) + \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right)^3 - 2\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - \arccos e\right\}$$

oder

$$\varepsilon = \frac{2m}{3a}\cdot\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^2}(1-\sqrt{1-e^2})\left\{\left(\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}}\right)^3\right.$$

$$- \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right)^3 \Big\} - \frac{4m}{a}\left\{\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}} - \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right\}$$

$$- \frac{2m}{a} \arccos\left(e^2\cos u + \sqrt{1-e^2\cos^2 u}\,\sqrt{1-e^2}\right)$$

setzen wir noch zur Abkürzung

$$\sqrt{1-e^2} = e'$$

so daß

$$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \frac{1+e}{e'}$$

wird, so erhalten wir schließlich

$$\varepsilon = \frac{2m\,e'(1-e')}{3\,a\,e^2}\left\{\left(\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}}\right)^3 - \left(\frac{1+e}{e'}\right)^3\right\}$$

$$- \frac{4m}{a}\left\{\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}} - \frac{1+e}{e'}\right\}$$

$$- \frac{2m}{a} \arccos\left(e^2\cos u + e'\sqrt{1-e^2\cos^2 u}\right).$$